UNIVERSITE ABD EL MALEK ESSAADI
Ecole National des Sciences Appliquées
Tétouan

Année universitaire 2011/2012
1[annee] CP

TD Physique 1
(Compléments mathématiques)

Exercice 1

Dans la base cartésienne (O, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$), on a :

$\vec{V}_1 = 2\,\vec{e}_x + \vec{e}_y - 2\,\vec{e}_z$

$\vec{V}_2 = \vec{e}_x + 2\,\vec{e}_y + 3\,\vec{e}_z$

$\vec{V}_3 = -\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$

1- Calculer les produits scalaires : $\vec{V}_1 . \vec{V}_2$, $\vec{V}_1 . \vec{V}_3$ et $\vec{V}_2 . \vec{V}_3$. En déduire les angles : $\theta_1 = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$; $\theta_2 = (\vec{V}_1, \vec{V}_3)$ et $\theta_3 = (\vec{V}_2, \vec{V}_3)$

2- Calculer les produits vectoriels : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$; $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$ et $\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1$

3- Calculer les produits mixtes: $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2).\vec{V}_3$; $(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3).\vec{V}_1$; $(\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1).\vec{V}_2$

Exercice 2

Dans la base cartésienne (O, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$), on a :

$$\vec{V}_1 = 2\,\vec{e}_x + 3\,\vec{e}_y - \vec{e}_z$$
$$\vec{V}_2 = 3\,\vec{e}_x - 2\,\vec{e}_y + 2\,\vec{e}_z$$

2- Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur: $\vec{C} = \vec{V}_1 + 2\,\vec{V}_2$

Exercice 3

Soit un vecteur $\vec{V}(t) = V(t).\,\vec{u}(t)$, où $\vec{u}(t)$ est son vecteur unitaire.

1- Montrer que si $\vec{V}$ a un module constant, le vecteur dérivée $\frac{d\vec{V}}{dt}$ lui est orthogonal.

2- Montrer que d'une manière générale : $\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt} = V.\frac{dV}{dt}$

Exercice 4

1- Exprimer la différentielle totale de la fonction suivante : $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy.\exp(z)$
2- Soient les fonctions de deux variables x et y: $f(x,y) = \cos(x^2y)$ et $g(x,y) = \exp(x^2 + 2y)$
   - Calculer la différentielle totale de chaque fonction
   - Calculer les dérivées partielles $\partial^2 f/\partial x^2$, $\partial^2 f/\partial x\partial y$; $\partial^2 f/\partial y\partial x$.

Exercice 5

1- Un point M(x, y, z) est repéré par le rayon vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ de module : $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

calculer : $\overrightarrow{grad}\, r$, $\overrightarrow{grad}(\frac{1}{r})$, $\overrightarrow{grad}(Log\, r)$

2- Soit $U(x, y, z) = 3\,x^2\,y\,z^2 + 4\,y^2\,z\,x^3$ un champ scalaire.

Montrer que $\overrightarrow{grad}\,U$ au point M(1,-1, 2) est parallèle au plan Oyz

Exercice 6

En explicitant la relation $dU = \overrightarrow{grad}\,U\,.\,\overrightarrow{dl}$

Donner l'expression du gradient en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques

Exercice 7

Soit U(x, y) = $x^2 + y^2 + xy$; un champ scalaire, et $\overrightarrow{dl}$ le déplacement élémentaire dans la direction faisant l'angle θ avec Ox.

1- Calculer en fonction de x, y et θ, la dérivée $\frac{dU}{dl}$.
2- Déterminer, en dérivant par rapport à θ, la valeur θ_0 pour laquelle cette dérivée est maximale.
3- Montrer que la direction ainsi définie est celle du vecteur gradient.

$\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right) = 0\right)$

Exercice 8

1- Calculer la divergence du rayon vecteur : $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

2- Calculer la divergence de $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$, faire le même calcul en appliquant la relation :

$$div\,(f\,\vec{A}) = \vec{A}\,\overrightarrow{grad}\,f + f\,div\,\vec{A}$$

Exercice 9r

1- Calculer $\overrightarrow{rot}\,\vec{r}$ et $\overrightarrow{rot}\frac{\vec{r}}{r^3}$, avec $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

2- Calculer $\overrightarrow{rot}\,\vec{A}$ avec $\vec{A} = 3x^2y\,\vec{e}_x - 2yz^3\,\vec{e}_y + x^2y\,\vec{e}_z$ au point M (1, 2, 1).

Déterminer les points de l'espace où $\overrightarrow{rot}\,\vec{A}$ est nul

Exercice 10

En chaque point M(x ,y, z) de l'espace, on définit un vecteur $\vec{v}$ par la relation $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ avec $\vec{\omega} = w\,\vec{k}$ et $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Montrer que $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot\,v}$

Exercice 11

1- Montrer que, dans le plan, on a, en tout point sauf à l'origine, $\Delta(Log\,r) = 0$
2- Déduire de la relation de définition $\Delta U = div\,\overrightarrow{grad}\,U$ l'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques

On donne en coordonnées cylindriques : $div\,\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r A_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta) + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Exercice 12

On donne le vecteur $\vec{A} = 4xy\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + yz\,\vec{k}$. Calculer de deux façons différentes le flux de ce vecteur a travers la surface du cube délimité par x = 0, x = 1 ; y = 0, y = 1 ; z = 0, z = 1

$-\int y\,dx\,dy\,dz = -\int_0^1 dx \int_0^1 y\,dy \int_0^1 dz$

Exercice 13

- Quel est l'angle solide sous lequel on voit, depuis le centre O d'une sphère, un élément dS de sa surface compris entre les méridiens φ et φ + dφ et les parallèles θ et θ + dθ.
- En déduire l'angle solide sous lequel on voit, depuis O :
  1- L'espace compris entre deux méridiens φ et φ + dφ
  2- L'espace compris entre deux parallèles θ et θ + dθ.

Exercice 14

1- Calculer l'angle solide Ω_1 sous lequel on voit une face négative d'un disque depuis le point O_1 de son axe.
2- Quelle est la valeur de l'angle solide Ω_2 sous lequel depuis un point O_2 de son axe, on voit la face positive d'un disque.



TD1 (Compléments)

Exercice 1 :

1- $\vec{V_1} = 2\vec{e_x} + \vec{e_y} - 2\vec{e_z}$

$\vec{V_1} \underset{(\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = -2$

$\vec{V_1} \cdot \vec{V_3} = 0$

$\vec{V_2} \cdot \vec{V_3} = 3$

On sait que $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \|\vec{V_1}\| \cdot \|\vec{V_2}\| \cos\theta$

$\|\vec{V_1}\| = \sqrt{4+1+4} = 3$

$\|\vec{V_2}\| = \sqrt{14}$

$\Rightarrow \cos\theta_1 = \frac{-2}{3\sqrt{14}} \Rightarrow \theta_1 = 100{,}26°$

$\vec{V_1} \cdot \vec{V_3} = 0 \Rightarrow \theta_2 = 90°$ $(\vec{V_1} \perp \vec{V_3})$

de même, on trouve $\theta_3 = 68{,}99°$

2- $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{(\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})}{=} \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$

* $\vec{V_2} \wedge \vec{V_3} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

* $\vec{V_3} \wedge \vec{V_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

3- $(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2})\vec{V_3} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -23$

$(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})\vec{V_1} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -12-3-8 = -23$

$(\vec{V_3} \wedge \vec{V_1})\vec{V_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -23$

$(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) \cdot \vec{V_3} = (\vec{V_3} \wedge \vec{V_1}) \cdot \vec{V_2} = (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) \cdot \vec{V_1}$

La permutation circulaire des vecteurs ne fait pas changer le produit mixte.

Exercice 2 :

$$\vec{A} = \|\vec{A}\| . \vec{u_A}$$

où $\vec{u_A}$ est le vect. unitaire porté par $\vec{A}$.

$\Rightarrow \vec{u_A} = \dfrac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$

* Dans ce cas, on a : $\vec{C} = \vec{V_1} + 2\vec{V_2}$

$\vec{C} = 8\vec{e_x} - \vec{e_y} + 3\vec{e_z}$

$\|\vec{C}\| = \sqrt{74}$

$\vec{u} = \dfrac{8}{\sqrt{74}}\vec{e_x} - \dfrac{1}{\sqrt{74}}\vec{e_y} + \dfrac{3}{\sqrt{74}}\vec{e_z}$

Exercice 3 :

$\vec{V}(t) = V(t) . \vec{u}(t)$

1- Si $V(t) = cte \Rightarrow \vec{V} \perp \dfrac{d\vec{V}}{dt}$

$\vec{V}.\vec{V} = (\vec{V})^2 = V^2$

$\dfrac{d(\vec{V})^2}{dt} = 0 \quad (V = cte)$

$\dfrac{d(\vec{V})^2}{dt} = 2\vec{V} . \dfrac{d\vec{V}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{V} \dfrac{d\vec{V}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{V} \perp \dfrac{d\vec{V}}{dt}$

2- $\vec{V} . \dfrac{d\vec{V}}{dt} = V(t) . \vec{u}(t) \dfrac{d(V(t)\vec{u}(t))}{dt}$

$= V(t) . \vec{u}(t) \left[\dfrac{dV(t)}{dt} . \vec{u}(t) + V(t) \dfrac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]$

$= V(t) . \dfrac{dV(t)}{dt} + V^2(t) . \underbrace{\vec{u}(t) . \dfrac{d\vec{u}(t)}{dt}}_{0}$ (car $\|\vec{u}(t)\| = 1 = cte$)

$\Rightarrow \vec{V} . \dfrac{d\vec{V}}{dt} = V \dfrac{dV}{d(t)}$ $\left(\left\| \dfrac{d\vec{V}}{dt} \right\| \neq \dfrac{d\|\vec{V}\|}{dt} \right)$

Exercice 4 :

1- $f(x) = x^2 + y^2 + z^2 + xy\exp(z)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} = 2x + ye^z$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} = 2y + xe^z$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} = 2z + xye^z$$

$$\Rightarrow df = (2x + ye^z)dx + (2y + xe^z)dy + (2z + xye^z)dz$$

2- $f(x,y) = \cos(x^2y)$ et $g(x,y) = e^{x^2+2y}$

$$df = (-2xy\sin(x^2y))\,dx - (x^2\sin(x^2y))\,dy$$
$$dg = (2xe^{x^2+2y})dx + (2e^{x^2+2y})dy$$

* $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2xy\sin(x^2y)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} =$ ~~[illegible]~~ $= \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$

$$= -2y\left(\sin(x^2y) + 2x^2\cos(x^2y)\right)$$

* $\dfrac{\partial f}{\partial x\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$: dérivées croisées

– Si les dérivées secondes sont continues alors les dérivées croisées égalent :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$



Exercice 5:

$\vec{r} = \vec{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$

$r = \|\vec{r}\| = \|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\vec{grad}\, r = \frac{\partial r}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{e_z}$

* $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$

$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$

$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$

$\vec{grad}\, r = \frac{x}{r}\vec{e_x} + \frac{y}{r}\vec{e_y} + \frac{z}{r}\vec{e_z}$

$= \frac{1}{r}\left(x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}\right)$

$= \frac{\vec{r}}{r}$

* $\vec{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{e_z}$

* $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial(1/r)}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial x}$

$= \left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$

$\frac{\partial(f(r))}{\partial x} = \frac{\partial(f(r))}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$

f dépend de r et

r " de x

de m̂ on trouve : $\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}$

$\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$

$\Rightarrow \vec{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

* $\vec{grad}(\log r) = \frac{\partial(\log r)}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial(\log r)}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial(\log r)}{\partial z}\vec{e_z}$

On a : $\frac{\partial(\log r)}{\partial x} = \frac{\partial(\log r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{x}{r} = \frac{x}{r^2}$

$\frac{\partial(\log r)}{\partial y} = \frac{y}{r^2}$, $\frac{\partial(\log r)}{\partial z} = \frac{z}{r^2}$

Alors $\vec{grad}(\log r) = \frac{\vec{r}}{r^2}$

2- $\vec{grad}(U) = (6xyz^2 + 12x^2y^2z)\vec{e_x} + (3x^2z^2 + 8yzx^3)\vec{e_y}$
$+ (6x^2yz + 4y^2x^3)\vec{e_z}$

au pt M, $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$

$\vec{grad}\,U)_M = \text{—}\,\vec{e_y} + \text{—}\,\vec{e_z} + 0\vec{e_x}$

$\Rightarrow \vec{grad}\,U)_M \parallel O_{yz}$

Exercice 6 :

U une fct scalaire dépendant de (ρ, θ, z)

$\Rightarrow \begin{cases} dU = ? \\ \vec{dl} = ? \end{cases}$

On posera : $\vec{A} = \vec{grad}\,U = \vec{\nabla} U$

$\vec{A} = A_\rho \vec{e_\rho} + A_\theta \vec{e_\theta} + A_z \vec{e_z}$

$dU = \vec{grad}\,U \vec{dl}$

$\Rightarrow$ diff totale de U

$dU = \frac{\partial U}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial z} dz$

$\vec{dl} = d\rho \vec{e_\rho} + \rho d\theta \vec{e_\theta} + dz \vec{e_z}$

$\vec{A} \cdot \vec{dl} = A_\rho d\rho + A_\theta \rho d\theta + A_z dz$

$\Rightarrow \begin{cases} A_\rho = \frac{\partial U}{\partial \rho} \\ \rho A_\theta = \frac{\partial U}{\partial \theta} \Rightarrow A_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta} \\ A_z = \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$

$$\overrightarrow{grad}\, U \Big)_{CC} = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e_\theta} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e_z}$$

Exercice 7 :

1- $U(x,y,z) = x^2 + y^2 + xy$

$\theta = (\widehat{\vec{dl}, \vec{OX}})$

Rappel :

$\vec{V} = V_x \vec{e_x} + V_y \vec{e_y}$

D'une manière générale

$\vec{V} = \underset{OX}{Proj}(\vec{V})\,\vec{e_x} + \underset{OY}{Proj}(\vec{V})\,\vec{e_y}$

Or : $\underset{(\Delta)}{Proj}(\vec{A}) = \vec{A}.\vec{u}$ $\quad$ $\vec{u}$: vect unitaire porté par (Δ)

$\Rightarrow \vec{V} = (\vec{V}.\vec{e_x})\vec{e_x} + (\vec{V}.\vec{e_y})\vec{e_y}$

$= \underbrace{\|\vec{V}\| \cos\theta}_{V_x}\,\vec{e_x} + \underbrace{\|\vec{V}\| \sin\theta}_{V_y}\,\vec{e_y}$

$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$

$= (2x+y)dx + (2y+x)dy$

Or $\vec{dl} = dx\,\vec{e_x} + dy\,\vec{e_y}$

$\vec{dl} \begin{cases} dx = \underset{OX}{Proj}(dl) = dl\cos\theta \\ dy = \underset{OY}{Proj}(dl) = dl\sin\theta \end{cases}$

$dU = (2x+y)\,dl\cos\theta + (2y+x)\,dl\sin\theta$

$\Rightarrow \frac{dU}{dl} = (2x+y)\cos\theta + (2y+x)\sin\theta$

2- $\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{dU}{dl}\right) = -(2x+y)\sin\theta + (2y+x)\cos\theta$
$= 0$

$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2y+x}{2x+y}$

$\theta = \theta_0$; $tg\theta_0 = \frac{2y+x}{2x+y}$

(3-) - On prendra, α l'angle entre grad U et l'axe OX

$$\vec{\nabla}u = \frac{\partial u}{\partial x}\Big)_y \vec{e_x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big)_x \vec{e_y}$$

$$= (2x+y)e_x + (2y+x)\vec{e_y}$$

On a : $\begin{cases} \|\vec{\nabla}U\| \cos(\alpha) = 2x+y \\ \|\vec{\nabla}U\| \sin(\alpha) = 2y+x \end{cases}$

Donc $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha = \frac{2y+x}{2x+y}$

$\tan\alpha = \tan\theta \Rightarrow \alpha = \theta$

Exercice 8 :

1- $\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$

$$\text{div}\,\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\text{div}\,\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\partial(\frac{x}{r})}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{y}{r})}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{z}{r})}{\partial z}$$

$$* \frac{\partial \frac{x}{r}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x \cdot \frac{1}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{r} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{r} + x\left(-\frac{x}{r^3}\right)$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}$$

ETUSUP .com

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}$$

donc $\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}$

$\operatorname{div}(f\vec{A}) = \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f + f \operatorname{div} \vec{A}$

$\Longrightarrow \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = ?$

$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \vec{r}\, \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} \operatorname{div}(\vec{r})$

On a $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x}{r^3}\vec{e_x} - \frac{y}{r^3}\vec{e_y} - \frac{z}{r^3}\vec{e_z}$

$= \frac{-1}{r^3}\left(x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}\right)$

$= \frac{-\vec{r}}{r^3}$

Or $\operatorname{div}(\vec{r}) = 3$

Donc $\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \vec{r} \cdot \left(\frac{-\vec{r}}{r^3}\right) + \frac{1}{r} \times (3) = \frac{-r^2}{r^3} + \frac{3}{r} = \frac{2}{r}$

Exercice 9 :

1- $\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$

$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{r} = \vec{\nabla} \wedge \vec{r}$

$= \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$

$\Longrightarrow \text{rot}\, \vec{r} = \vec{0}$

$\text{rot}\, \frac{\vec{r}}{r^3} = ?$

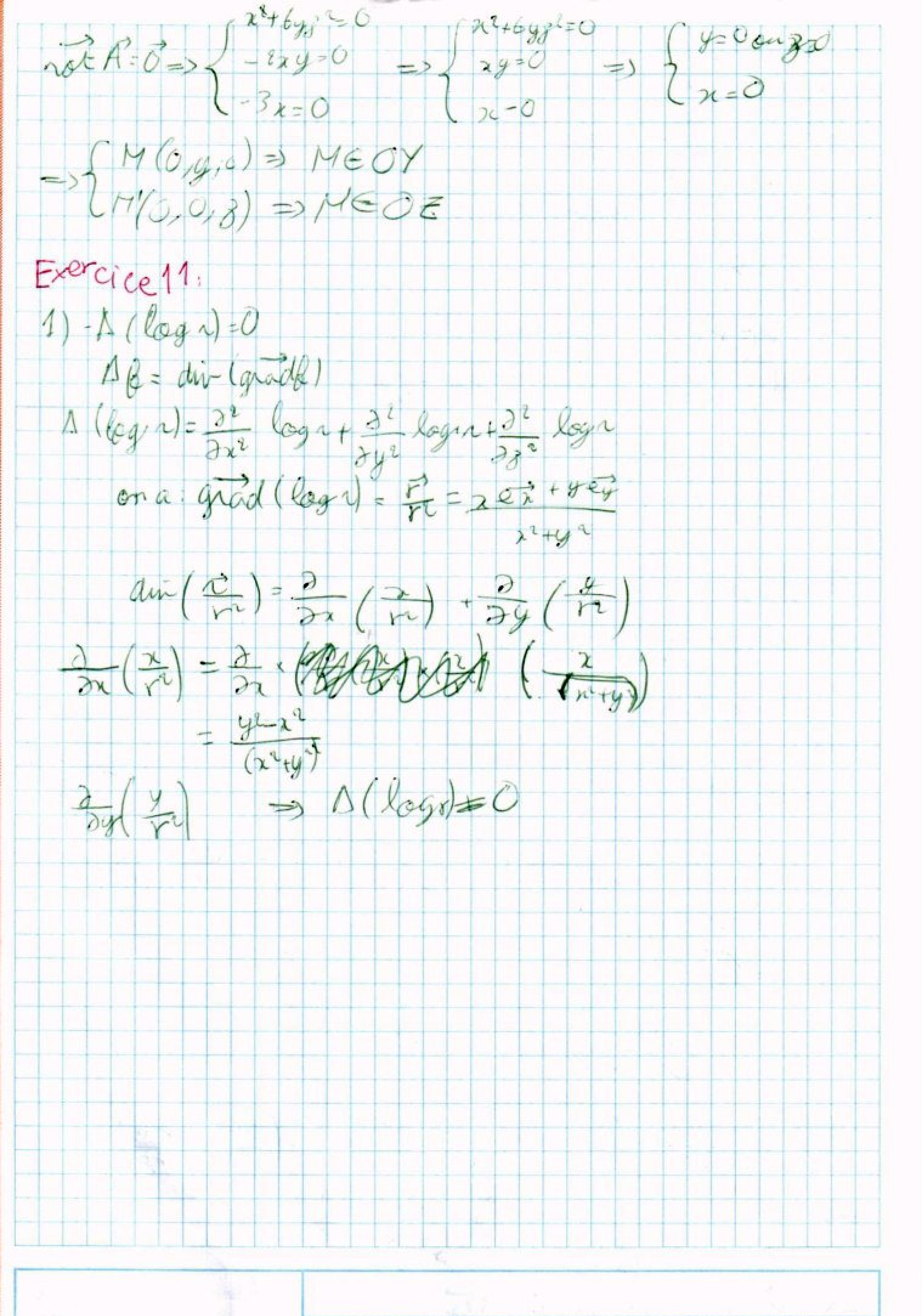
2- $\vec{A} = \underbrace{3x^2y}_{A_x}\vec{e_x} - \underbrace{2yz^3}_{A_y}\vec{e_y} + \underbrace{x^2y}_{A_z}\vec{e_z}$

$\text{rot}\, A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$

$\Longrightarrow (x^2 + 6yz^2)\vec{e_x} + (0 - 2xy)\vec{e_y} + (0 - 3x^2)\vec{e_z}$

$\text{rot}\, \vec{A} = (x^2 + 6yz^2)\vec{e_x} - 2xy\vec{e_y} - 3x^2\vec{e_z}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{A})_M = 13\vec{e_x} - 4\vec{e_y} - 3\vec{e_z}$



$$\vec{rot}\,\vec{A} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 6yz^2 = 0 \\ -2xy = 0 \\ -3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 6yz^2 = 0 \\ xy = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M(0, y, 0) \Rightarrow M \in OY \\ M'(0, 0, z) \Rightarrow M \in OZ \end{cases}$$

Exercice 11 :

1) $\Delta(\log r) = 0$

$\Delta f = \text{div}(\vec{grad} f)$

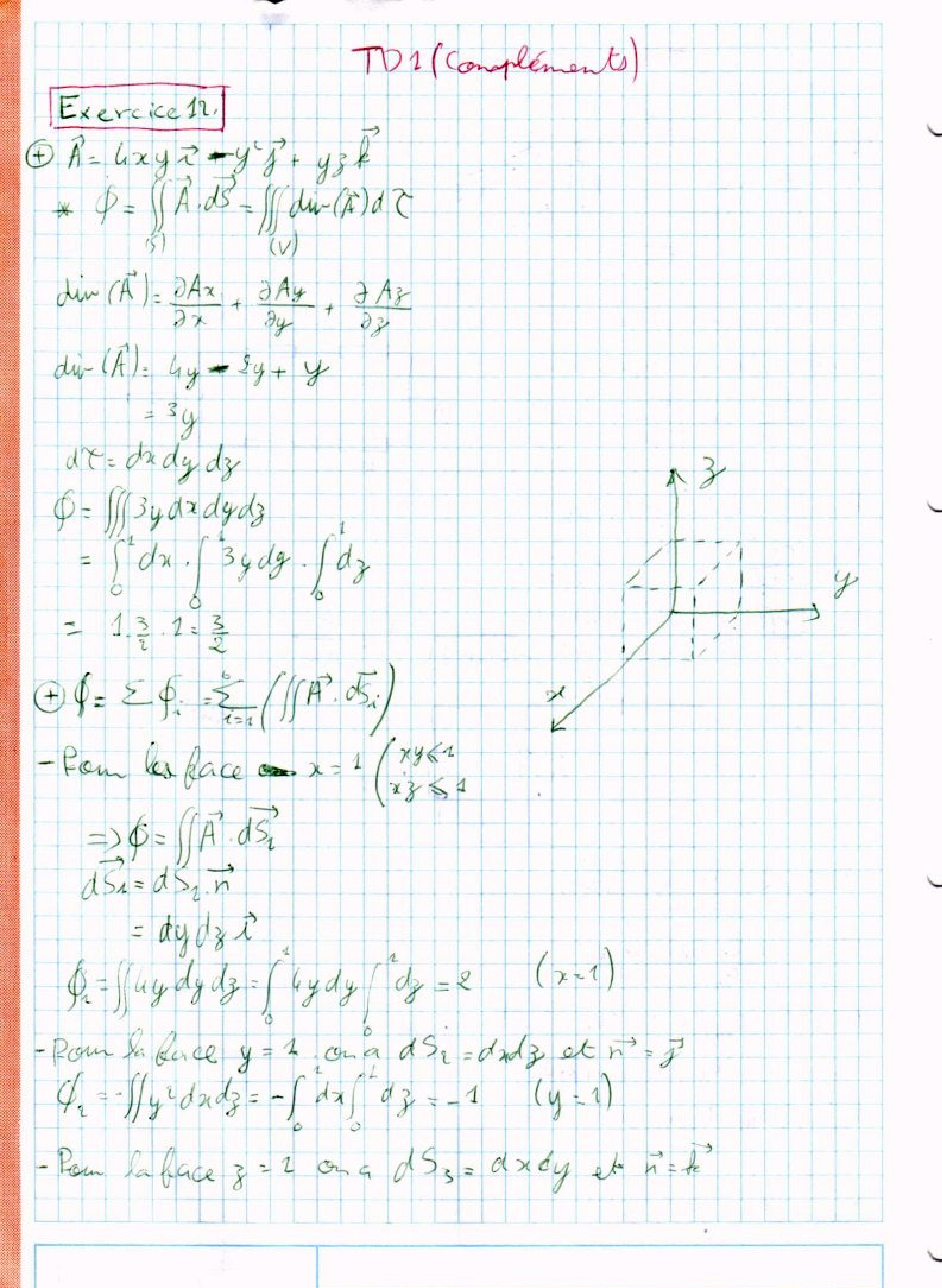
$$\Delta(\log r) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log r + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \log r + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \log r$$

on a : $\vec{grad}(\log r) = \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{x\vec{e_x} + y\vec{e_y}}{x^2 + y^2}$

$$\text{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^2}\right) \Rightarrow \Delta(\log r) = 0$



TD 1 (compléments)

Exercice 12.

⊕ $\vec{A} = 4xy\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + yz\,\vec{k}$

* $\phi = \iint_{(S)} \vec{A}\cdot\vec{dS} = \iiint_{(V)} \mathrm{div}(\vec{A})\, d\tau$

$\mathrm{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

$\mathrm{div}(\vec{A}) = 4y - 2y + y$

$= 3y$

$d\tau = dx\,dy\,dz$

$\phi = \iiint 3y\,dx\,dy\,dz$

$= \int_0^1 dx \cdot \int_0^1 3y\,dy \cdot \int_0^1 dz$

$= 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$

⊕ $\phi = \sum \phi_i = \sum_{i=1}^{6} \left(\iint \vec{A}\cdot\vec{dS_i} \right)$

– Pour la face $x = 1$ $\begin{cases} xy \leq 1 \\ xz \leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \phi = \iint \vec{A}\cdot\vec{dS_1}$

$\vec{dS_1} = dS_1\,\vec{n}$

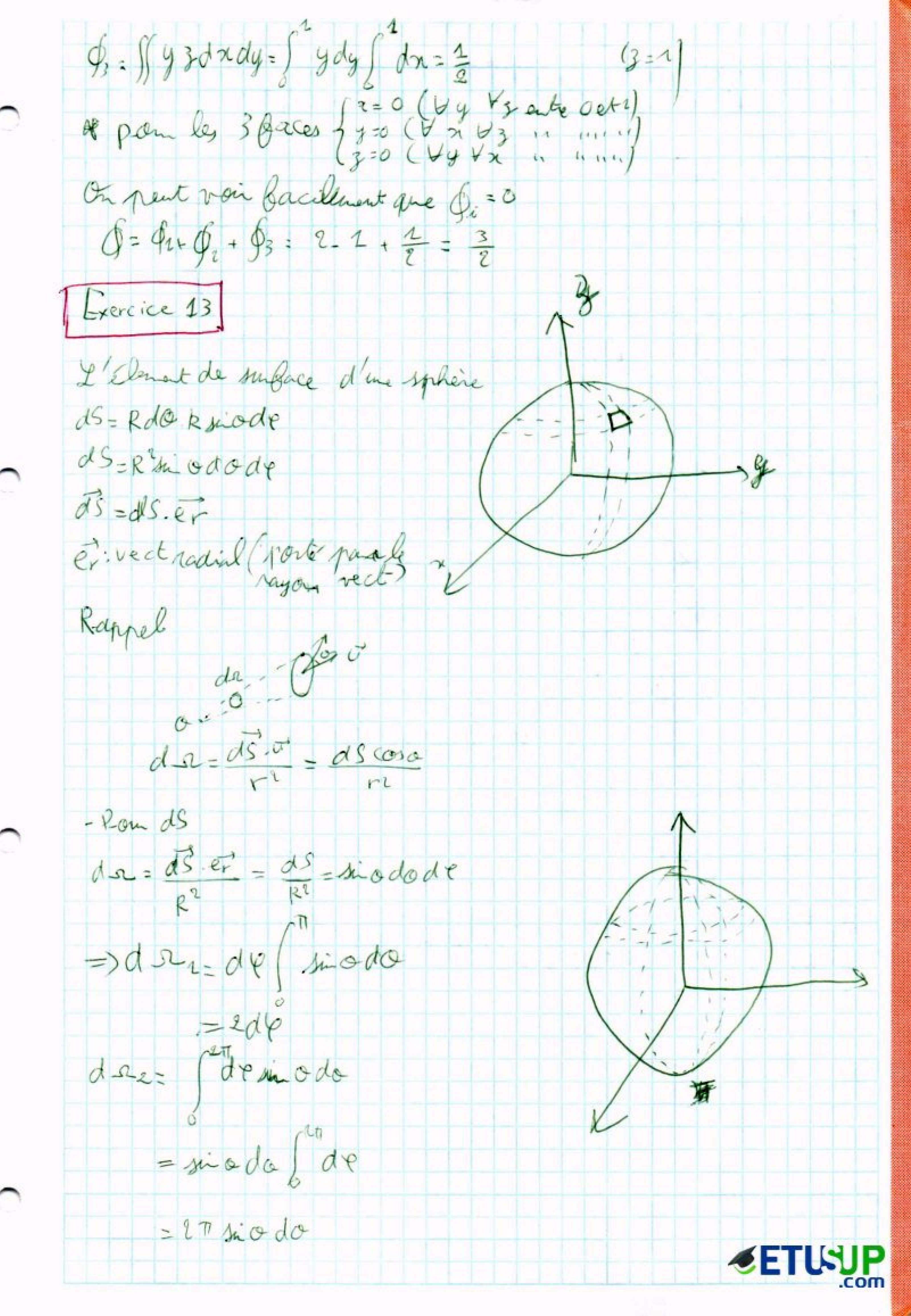
$= dy\,dz\,\vec{i}$

$\phi_1 = \iint 4y\,dy\,dz = \int_0^1 4y\,dy \int_0^1 dz = 2$ $(x = 1)$

– Pour la face $y = 1$ on a $dS_2 = dx\,dz$ et $\vec{n} = \vec{j}$

$\phi_2 = -\iint y^2\,dx\,dz = -\int_0^1 dx \int_0^1 dz = -1$ $(y = 1)$

– Pour la face $z = 1$ on a $dS_3 = dx\,dy$ et $\vec{n} = \vec{k}$



$\phi_3 = \iint y z \, dx \, dy = \int_0^1 y \, dy \int_0^1 dx = \frac{1}{2}$ $(z=1)$

pour les 3 faces $\begin{cases} x=0 \ (\forall y \ \forall z \text{ entre } 0 \text{ et } 1) \\ y=0 \ (\forall x \ \forall z \ \text{"} \ \text{"}) \\ z=0 \ (\forall y \ \forall x \ \text{"} \ \text{"}) \end{cases}$

On peut voir facilement que $\phi_i = 0$

$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 2 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Exercice 13

L'élément de surface d'une sphère

$dS = R d\theta \, R \sin\theta \, d\varphi$

$dS = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$\vec{dS} = dS . \vec{e_r}$

$\vec{e_r}$: vect radial (porté par le rayon vect)

Rappel

$d\Omega = \frac{\vec{dS} . \vec{u}}{r^2} = \frac{dS \cos\alpha}{r^2}$

- Pour dS

$d\Omega = \frac{\vec{dS} . \vec{e_r}}{R^2} = \frac{dS}{R^2} = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$\Rightarrow d\Omega_1 = d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta$

$= 2 d\varphi$

$d\Omega_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\theta \, d\theta$

$= \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

$= 2\pi \sin\theta \, d\theta$

On peut déduire alors que l'angle solide sous lequel on voit depuis O tout l'espace autour de O est 4π

Exercice 14

1 -

Un élément de surface de disque. $dS = r\,dr\,d\theta$

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r} r\,dr$$

$\Rightarrow d\Omega$: l'angle solide élément sous lequel on voit l'élément dS de disque est : $d\Omega = \frac{\vec{dS}\cdot\vec{u}}{l^2}$

$$\Rightarrow d\Omega = \frac{r\,dr\,d\theta\,\cos\varphi}{l^2}$$

Cherchons à remplacer : r par φ

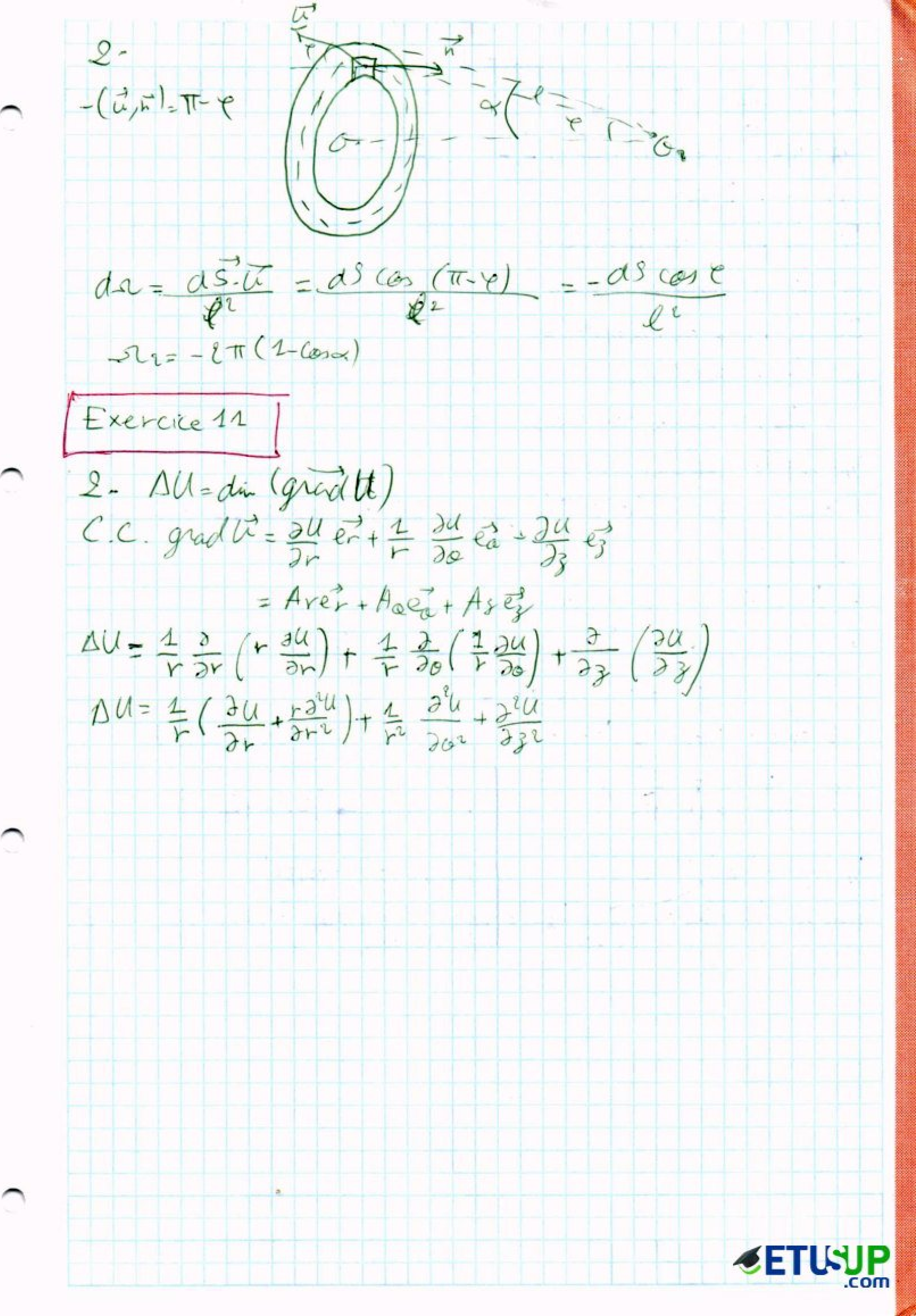
et l par φ

$\Rightarrow r = a\,tg\,\varphi$ et $l = \frac{a}{\cos\varphi}$

$$dr = \frac{a}{\cos^2\varphi}\,d\varphi$$

$\Rightarrow d\Omega = d\theta\,\sin\varphi\,d\varphi$

$$\Rightarrow \Omega_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha} \sin\varphi\,d\varphi = 2\pi(1-\cos\alpha)$$



2-

$-(\vec{u}, \vec{n}) = \pi - \varphi$

$$d\Omega = \frac{d\vec{S}\cdot\vec{u}}{\ell^2} = \frac{dS\cos(\pi-\varphi)}{\ell^2} = \frac{-dS\cos\varphi}{\ell^2}$$

$$\Omega_2 = -2\pi(1-\cos\alpha)$$

Exercice 11

2- $\Delta U = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U)$

C.C. $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e_z}$

$= A_r\vec{e_r} + A_\theta\vec{e_\theta} + A_z\vec{e_z}$

$$\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

$$\Delta U = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial U}{\partial r} + r\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

TD 1 (Compléments)

Exercice 10 :

$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

avec $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{\omega} = \omega \vec{k}$

on sait que $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

Alors : $\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} - (-x\omega)\vec{j}$

$= -\omega y \vec{i} + x\omega \vec{j}$

$\text{rot}\vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \begin{vmatrix} -\omega y & x\omega & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x\omega}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{-\partial \omega y}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial \omega y}{\partial z} - \frac{\partial x\omega}{\partial x}\right)\vec{k}$

$= 0 + 0 + (\omega + \omega)\vec{k}$

$= 2\omega \vec{k}$

Alors $\text{rot}\vec{V} = 2\omega\vec{k}$ et puisque $\omega\vec{k} = \vec{\omega}$

donc $\text{rot}\vec{V} = 2\vec{\omega}$

$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\text{rot}\vec{V}$


ETUSUP.com